ПЛОСКОСТЬ ДВУМЕРНОЙ ПЕРЕТЯЖКИ АСТИГМАТИЧЕСКИХ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ

Е.В. Разуева,
СФ ФИАН

11 ноября 2016 г.

Параксиальное уравнение и преобразование Френеля

Параксиальное уравнение

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + 2ik\partial_z)F(x, y, z) = 0.$$

Преобразование Френеля

$$F(x, y, z)\Big|_{z=0} = F_0(x, y),$$

$$F(x, y, z) = \frac{k}{2\pi iz} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2z}\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]\right) F_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Ширина гауссова пучка w_0 – положительный параметр, который показывает, как быстро убывает поперечное распределение интенсивности пучка на бесконечности:

$$G(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{G(w_0)}{G(0)} = \frac{1}{e}.$$

Плоскость перетяжки гауссова пучка

Эволюция гауссова пучка с исходным распределением амплитуды

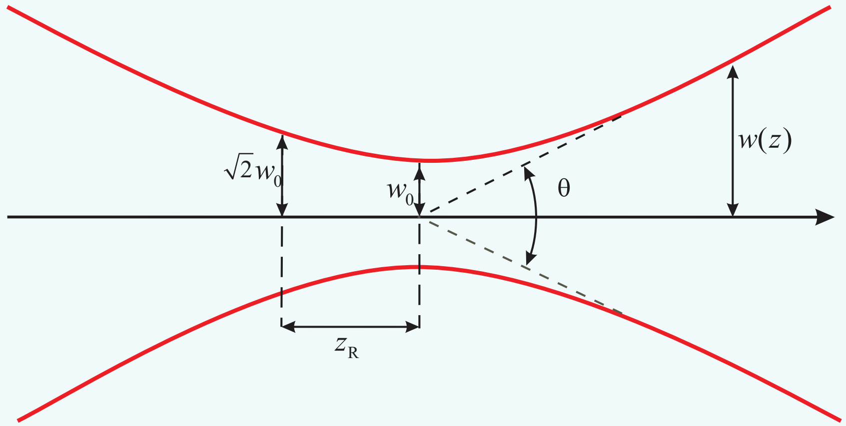
$$G_0(x,y) = \exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\Big)$$

при распространении в зоне Френеля:

$$G(x,y,z) = \frac{1}{1+\frac{2iz}{kw_0^2}} \exp\Big(\frac{2iz}{kw_0^2}\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\Big)\exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\Big).$$

Ширина гауссова пучка:

$$w(z) = w_0\sqrt{1+\frac{4z^2}{k^2w_0^4}}\,.$$



Плоскость,
в которой ширина гауссова пучка
$w(z)$ принимает минимальное значение,
называется плоскостью перетяжки.
В этой плоскости фаза пучка равна
нулю, т.е. волновой фронт плоский.

Площадь светового пятна

Площадь светового пятна кругового гауссова пучка

$$\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+y^2}{w^2(z)} \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=w^2(z) \quad \Rightarrow \quad S(z)=\pi w^2(z).$$

Площадь светового пятна в плоскости перетяжки принимает минимальное значение.

Эллиптические гауссовы пучки:

$$\exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2(z)}-\frac{y^2}{w_y^2(z)}\right) \quad \Rightarrow \quad S=\pi w_x w_y$$

Астигматические гауссовы пучки

$$F(x,y,z) = \sqrt{\det \boldsymbol{\Gamma}(z)}\, \exp\!\left(\frac{ik}{2}(\mathbf{r}, \Gamma(z)\mathbf{r})\right),$$

$\mathbf{r} = (x, y)$ – вектор поперечных пространственных координат,

$$\boldsymbol{\Gamma}(z) = \mathbf{A}(z) + i\mathbf{B}(z)$$

– симметричная комплесная 2x2 матрица с положительно определённой мнимой частью, удовлетворяющая уравнению

$$\Gamma'(z) = -\Gamma^2(z) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}'(z) = -(\mathbf{A}(\mathbf{z})\mathbf{B}(\mathbf{z}) + \mathbf{B}(\mathbf{z})\mathbf{A}(\mathbf{z})).$$

Утверждение: В плоскости, в которой площадь светового пятна гауссова пучка принимает минимальное значение, дефокусировочный параметр пучка равен нулю.

Доказательство:

$$(\det \mathbf{B}(z))' = -2\mathrm{Sp}\mathbf{A}(z) \det \mathbf{B}(z),$$

$$S(z) = \det \mathbf{B}(z).$$

Положение плоскости двумерной перетяжки

Площадь светового пятна:

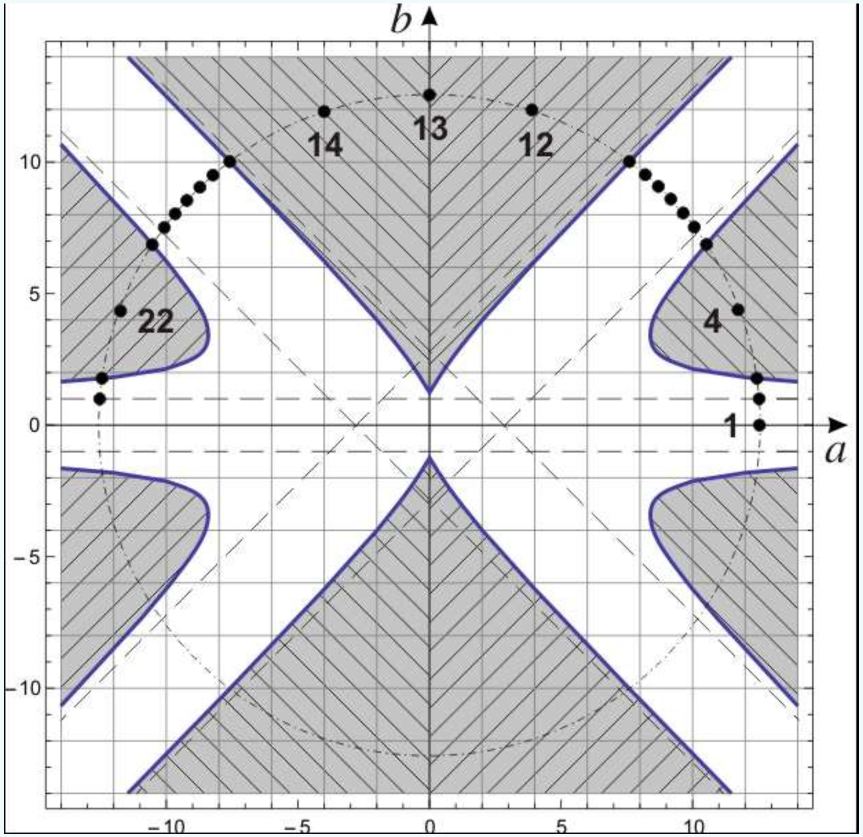
$$S(z) = \det \mathbf{B} = P_4(z),$$

$$S'(z) = P_3(z).$$

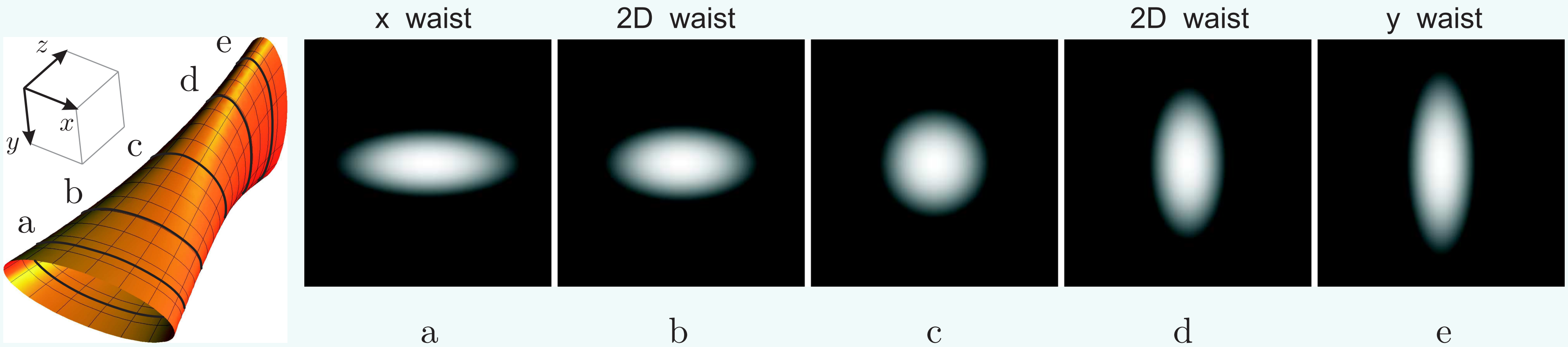
Фаза гауссова пучка:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{A}\mathbf{r}) = a(x^2 + y^2) + b\psi(x, y, \beta),$$

$$\psi(x, y, \beta) = (x^2 - y^2)\cos\beta + 2xy\sin\beta.$$



Плоскость 2D-перетяжки астигматических гауссовых пучков



Трёхмерный профиль и распределение интенсивности астигматического гауссова пучка на различных расстояниях от исходной плоскости.

Для астигматических гауссовых пучков «плоскость двумерной перетяжки» можно определить как плоскость, в которой площадь эллипса интенсивности пучка принимает минимальное значение, а дефокусировочный параметр пучка равен нулю.

E. Razueva, A. Krutov, and E. Abramochkin. Definition of the waist plane for general astigmatic Gaussian beams// Opt. Lett., 2015, v. 40, N 9.

«Так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым Творцом, то в мире не происходит ничего, в чём не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума»

Л. Эйлер

« Since the fabric of the world is the most perfect and was established by the wisest Creator, nothing happens in this world in which some reason of maximum or minimum would not come to light.»

L. Euler

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ